**Дифференциальные уравнения.**

**Занятие 2.**

**2.1. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.**

**Определение 2.1.** Уравнение

(2.1)

называется уравнением в полных дифференциалах, если

. . (2.2)

**Теорема 2.1.** Пусть уравнение (2.1) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует функция , называемая потенциальной, такая, что , и, следовательно, левая часть уравнения (2.1) равна полному дифференциалу функции .

Эта функция задаётся формулой

, (2.3)

где и - произвольные допустимые значения переменных

Тогда общее решение уравнения (2.1) неявным образом задается уравнением

*,*

где произвольная константа.

**Пример 2.1.** Решить уравнение .

*Решение*. Имеем: ,

То есть В формуле (2.3) можно положить Тогда

*.*

Тогда общим интегралом уравнения будет уравнение

**2.2. Интегрирующий множитель.**

Если уравнение (2.1), являющееся уравнением в полных дифференциалах, поделить на некоторое выражение то вновь полученное уравнение, вообще говоря, не будет уравнением в полных дифференциалах. Но если теперь последнее уравнение умножить на , то мы вернёмся к уравнению в полных дифференциалах.

**Определение 2.2.** Пусть уравнение (2.1) не является уравнением в полных дифференциалах. Тогда множитель такой, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, называется *интегрирующим множителем*.

Известно, что интегрирующий множитель существует при достаточно гладких функциях , но найти его возможно только в некоторых частных случаях. Мы не будем заниматься нахождением интегрирующего множителя, ограничившись упоминанием о нём.

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения:

1) , 2) 3) , 4)

5) , 6) .

**2.2. Линейные уравнения первого порядка.**

**Определение 2.3.** Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

(2.4)

где и - заданные функции, непрерывные на интервале, на котором рассматривается уравнение.

Будем искать решение уравнения (2.4) в виде произведения двух функций: . Поскольку то подставив в уравнение (2.4), получим:

, откуда следует: .

Приравняв скобку из левой части последнего уравнения к нулю, получим для функций систему уравнений:

. (2.5)

Поскольку первое уравнение содержит только одну неизвестную функцию, то начинать решать систему нужно с этого уравнения. Заметим, что это уравнение отличается от исходного только тем, что правая часть его равна нулю. Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно, переписав его в виде

*,* разделим переменные: Проинтегрировав, получим:

.

Последнее равенство определяет общее решение первого из уравнений системы. Однако, можно показать (здесь мы это опустим, отослав к лекции), что не теряя общности, можно в этом равенстве положить Подставляя во второе уравнение , получим:

Тогда общее решение уравнения (2.4) имеет вид:

, (2.6)

где произвольная константа. Напомним, что общее решение уравнения первого порядка должно зависеть от одной произвольной константы.

Следует отметить, что нет нужды запоминать формулу (2.6), а нужно повторять приведённые выкладки при решении каждого конкретного уравнения.

**Пример 2.2.**  Решить задачу Коши

*Решение.*  Будем искать решение уравнения в виде Тогда:

*.*

Тогда система (2.5) примет вид:

.

Решим первое из уравнений системы:

Как было сказано выше, можно положить то есть . Подставив во второе уравнение системы, получим:

*.*

Это – общее решение уравнения. Найдём теперь решение задачи Коши. Положив в общем решении получим: . Тогда решением задачи Коши будет функция

.

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения и задачи Коши:

1) ; 2) 3) , ;

4) 5); 6)

**2.3. Уравнение Бернулли.**

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

*.* (2.4)

При уравнение (2.4) является линейным.

Уравнение Бернулли сводится к линейному, если его обе части умножить на и ввести новую неизвестную функцию . Действительно, тогда получим:

Поскольку то придём к линейному уравнению

**Пример 2.2.** Решить уравнение .

*Решение.* Умножив обе части уравнения на , получим:

. (2.5)

Введем новую неизвестную функцию . Тогда / Подставив в (2.5), получим линейное уравнение

Далее его следует решать так, как изложено в пункте 2.2.

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения:

1) ; 2)